

## ATURAN RANTAI

### UNTUK MENENTUKAN TURUNAN FUNGSI KOMPOSISI

#### Dalil yang mendasari: [Aturan Rantai]

Misalkan  $y = f(u)$ ,  $u = g(x)$  masing-masing fungsi riil. Jika  $g$  diferensiabel di  $x$  dan  $f$  diferensiabel di  $u = g(x)$  maka fungsi komposisi  $f \circ g$  [yang didefinisikan sebagai  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ ] diferensiabel di  $x$ , dan berlakulah:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

atau, dengan notasi Leibniz:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

#### Contoh 1

Misalkan  $y = (3x^5 + 7x)^{10}$ . Tentukan  $y'$

#### **Jawab:**

$y$  dapat dinyatakan sebagai  $y = u^{10}$  dengan  $u = 3x^5 + 7x$ .

$y$  merupakan fungsi komposisi  $f \circ g$  dengan  $y = f(u) = u^{10}$  dan  $u = g(x) = 3x^5 + 7x$ .

$$\frac{dy}{du} = 10u^9 \quad ; \quad \frac{du}{dx} = 15x^4 + 7$$

Menurut aturan rantai,  $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

Jadi,  $y' = (10 u^9) \cdot (15x^4 + 7) = (150x^4 + 70)(3x^5+7x)^9$

### Contoh 2

Tentukan turunan dari  $y = \sqrt{x^2 + 10}$ .

**Jawab:**

$y$  dapat dinyatakan sebagai  $y = \sqrt{u} = u^{1/2}$  dengan  $u = x^2 + 10$ .

$y$  merupakan fungsi komposisi  $f \circ g$  dengan  $y = f(u) = u^{1/2}$  dan  $u = g(x) = x^2 + 10$ .

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2}u^{-1/2} \quad ; \quad \frac{du}{dx} = 2x$$

Menurut aturan rantai,  $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

$$y' = \frac{1}{2}u^{-1/2} \cdot 2x = x(x^2 + 10)^{-\frac{1}{2}}$$

### Contoh 3

Tentukan turunan dari  $y = e^{\sqrt{x}}$ .

**Jawab:**

$y$  dapat dinyatakan sebagai  $y = e^u$  dengan  $u = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$y$  merupakan fungsi komposisi  $f \circ g$  dengan  $y = f(u) = e^u$  dan  $u = g(x) = x^{1/2}$ .

$$\frac{dy}{du} = e^u \quad ; \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

Menurut aturan rantai,  $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

$$y' = e^u \cdot \frac{1}{2}x^{-1/2} = e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2}x^{-1/2} \cdot e^{\sqrt{x}}$$

#### Contoh 4

Tentukan turunan dari  $y = \sqrt[3]{1 + 5 \ln x}$ .

**Jawab:**

$y$  dapat dinyatakan sebagai  $y = \sqrt[3]{u} = u^{1/3}$  dengan  $u = 1 + 5 \ln x$

$y$  merupakan fungsi komposisi  $f \circ g$  dengan  $y = f(u) = u^{1/3}$  dan  $u = g(x) = 1 + 5 \ln x$ .

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{3} u^{-2/3} \quad ; \quad \frac{du}{dx} = 5 \cdot \frac{1}{x} = \frac{5}{x}$$

Menurut aturan rantai,  $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

$$y' = \frac{1}{3} u^{-2/3} \cdot \frac{5}{x} = \frac{5(1 + 5 \ln x)^{-2/3}}{3x}$$

#### Contoh 5

Tentukan turunan dari  $y = 3^{\ln x} + 10$ .

**Jawab:**

$y$  dapat dinyatakan sebagai  $y = 3^u + 10$  dengan  $u = \ln x$

$y$  merupakan fungsi komposisi  $f \circ g$  dengan  $y = f(u) = 3^u + 10$  dan  $u = g(x) = \ln x$ .

$$\frac{dy}{du} = 3^u \cdot \ln 3 \quad ; \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$$

Menurut aturan rantai,  $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

$$y' = (3^u \cdot \ln 3) \cdot \frac{1}{x} = \frac{(\ln 3) \cdot 3^{\ln x}}{x}$$

### Contoh 6

Diketahui  $y = f(x) = \sqrt{x^2 + 10}$ .

Tentukan  $f'(0)$ .

**Jawab:**

$$y' = f'(x) = x(x^2 + 10)^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{lihat penyelesaian Contoh 2})$$

$$f'(0) = 0 \cdot (0^2 + 10)^{-1/2} = 0$$