MENENTUKAN NILAI EKSTRIM LOKAL SUATU FUNGSI

Batasan

Yang dibahas adalah fungsi *f* dengan syarat berikut:

1. *f* merupakan fungsi dengan *domain* $\mathbb{R}$ dan *co-domain* $\mathbb{R}$
2. *f* diferensiabel di setiap $x \in \mathbb{R}$

Dalil yang mendasari

1. Misalkan fungsi *f* kontinu pada selang terbuka yang memuat c. Jika *f* mencapai ekstrim lokal di c dan fungsi *f* diferensiabel di c maka $f'(c) = 0$.
2. Misalkan fungsi *f* diferensiabel pada selang terbuka yang memuat c. Jika $f'(c) = 0$ dan $f''(c) < 0$ maka f mencapai maksimum lokal di c. Jika $f'(c) = 0$ dan $f''(c) > 0$ maka f mencapai minimum lokal di c.

Teknik penyelesaian

Langkah 1

Cari titik stasioner dari *f* dengan mencari akar-akar persamaan $f'(x) = 0$.

Langkah 2 (uji turunan kedua)

Tentukan rumus $f''(x)$, substitusikan semua akar pada Langkah 1 ke dalam $f''(x)$

Terapkan dalil no. 2 di atas untuk menentukan apakah akar itu akan memberikan nilai maksimum lokal atau minimum lokal.

Langkah 3:

Tentukan nilai ekstrim lokal dengan mensubstitusikan akar-akar yang diperoleh pada Langkah 1 ke dalam ***f* (x)**.

Contoh 1

$$y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x$$

Tentukan nilai *x* agar *f* mencapai nilai ekstrim lokal. Berapa nilai ekstrim lokal tersebut?

Jawab:

Langkah 1: mencari titik stasioner

$$f'(x) = x^2 - 5x + 4$$

$$f'(x) = 0$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$x_1 = 1 \qquad x_2 = 4$

Langkah 2: uji turunan kedua

$$f\,''(x) = 2x - 5$$

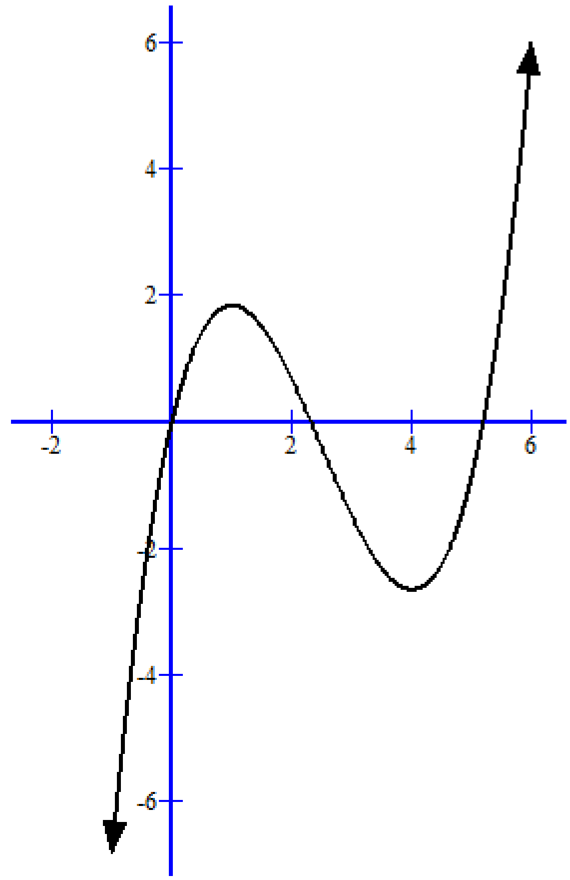
f “(1) = 2.1 – 5 = -3 < 0 $\Rightarrow$ x = 1 akan menghasilkan nilai maks. lokal

f “(4) = 2.4 – 5 = 3 > 0 $\Rightarrow$ x = 4 akan menghasilkan nilai min. lokal

Langkah 3: mencari nilai ekstrim lokal

$$y_{\max} = f(1) = \frac{1}{3}(1)^3 - \frac{5}{2}(1)^2 + 4 \cdot 1 = \frac{11}{6}$$

$$y_{\min} = f(4) = \frac{1}{3}(4)^3 - \frac{5}{2}(4)^2 + 4 \cdot 4 = -\frac{8}{3}$$


6
4
2
-2
-4
-6
-2
2
4
6

Contoh 2

$$y = f(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{75}{2}x^2$$

Tentukan nilai *x* agar *f* mencapai nilai ekstrim lokal. Berapa nilai ekstrim lokal tersebut?

Jawab:

Langkah 1: mencari titik stasioner

$$f'(x) = 3x^3 - 75x$$

$$f'(x) = 0$$

$$3x^3 - 75x = 0$$

$3x(x^2 - 25) = 0$

$3x(x+5)(x-5) = 0$

$x_1 = 0$ $x_2 = -5$ $x_3 = 5$

Langkah 2: uji turunan kedua

$f''(x) = 9x^2 - 75$

$f''(0) = 9.0^2 - 75 = -75 < 0$ $\Rightarrow$ x = 0 akan menghasilkan nilai maks. lokal

$f''(-5) = 9.(-5)^2 - 75 = 150 > 0$ $\Rightarrow$ x = -5 akan menghasilkan nilai min. lokal

$f''(5) = 9.5^2 - 75 = 150 > 0$ $\Rightarrow$ x = 5 akan menghasilkan nilai min. lokal

Langkah 3: mencari nilai ekstrim lokal

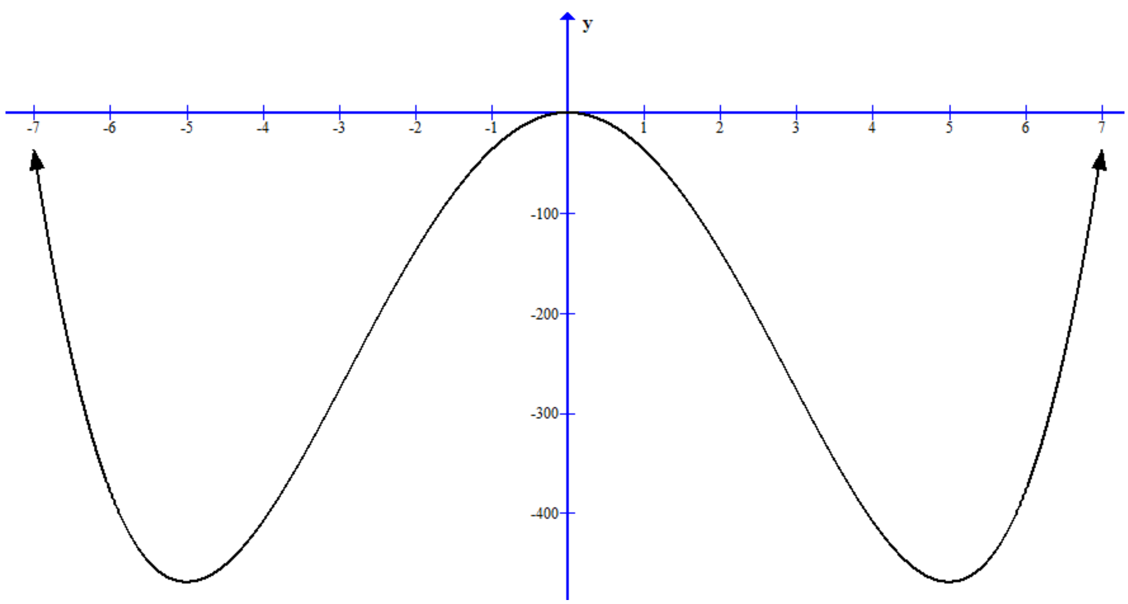
$$y = f(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{75}{2}x^2$$

$$y_{\max} = f(0) = \frac{3}{4}(0)^4 - \frac{75}{2}(0)^2 = 0$$

$$y_{\min} = f(-5) = \frac{3}{4}(-5)^4 - \frac{75}{2}(-5)^2 = -468{,}75$$

$$y_{\min} = f(5) = \frac{3}{4}(5)^4 - \frac{75}{2}(5)^2 = -468{,}75$$

Jadi, nilai minimum lokalnya = - 468,75 dan maksimum lokalnya 0.



<u>Contoh 3</u>

y = *f*(x) = x^5 + 10

Tentukan nilai *x* agar *f* mencapai nilai ekstrim lokal. Berapa nilai ekstrim lokal tersebut?

Jawab:

Langkah 1: mencari titik stasioner

$f(x) = x^5 + 10$

$f'(x) = 5x^4$

$f'(x) = 0$

$5x^4 = 0$

$x = 0$

Langkah 2: uji turunan kedua

$f''(x) = 20x^3$

$f''(0) = 20.0^3 = 0$

$x = 0$ tidak akan menghasilkan nilai ekstrim lokal

Jadi, f tidak memiliki nilai ekstrim lokal.