VARIABEL ACAK DAN DISTRIBUSI PELUANG

Variabel acak: suatu fungsi dengan ruang sampel sebagai daerah asal (*domain*)-nya dan *range*-nya merupakan himpunan bagian dari $\mathbb{R}$.

Perhatikanlah kata-kata bergaris bawah pada definisi di atas. Dari definisi tersebut jelas bahwa variabel acak tak lain merupakan suatu fungsi. Apabila kita mengingat konsep tentang fungsi, kita tentunya memahami bahwa fungsi memiliki daerah asal (*domain*) dan daerah kawan (*codomain*). Dalam variabel acak, *domain*-nya wajib merupakan ruang sampel (*sample space*) dan *range*-nya wajib merupakan himpunan bagian dari $\mathbb{R}$.

Contoh 1: Variabel Acak

Misalkan kita lemparkan sebuah uang logam sebanyak 3 kali, dan kita amati sisi uang logam yang menghadap ke atas. Dalam hal ini, ruang sampelnya adalah S = {AAA, AAG, AGA, GAA, AGG, GAG, GGA, GGG}. Misalkan **X** adalah suatu fungsi dengan *domain* S dan *codomain* $\mathbb{R}$ dengan **X**(ω) = banyaknya sisi G pada ω [untuk setiap $\omega \in S$]. Jadi, **X**(AAA) = 0, **X**(AAG) = 1, **X**(AGA) = 1, **X**(GAA) = 1, **X**(AGG) = 2, **X**(GAG) = 2, **X**(GGA) = 2, dan **X**(GGG) = 3. *Range* dari **X** adalah $\{0, 1, 2, 3\} \subseteq \mathbb{R}$. Jadi, **X** merupakan variabel acak.

Contoh 2: Variabel Acak

Misalkan dalam suatu kotak terdapat 6 buah bola yang hanya berbeda dalam hal warna. Terdapat 4 yang berwarna kuning dan 2 hijau. Dari antara 6 buah bola tersebut, diambillah secara acak 4 buah bola secara sekaligus. Anggaplah 4 bola kuning tersebut bernama K_1, K_2, K_3, dan K_4, sedangkan 2 bola hijau tersebut bernama H_1 dan H_2. Maka ruang sampel pada eksperimen ini adalah S = {$K_1K_2K_3K_4$, $K_1K_2K_3H_1$, $K_1K_2K_4H_1$, $K_1K_3K_4H_1$, $K_2K_3K_4H_1$, $K_1K_2K_3H_2$, $K_1K_2K_4H_2$, $K_1K_3K_4H_2$, $K_2K_3K_4H_2$, $K_1K_2H_1H_2$, $K_1K_3H_1H_2$, $K_1K_4H_1H_2$, $K_2K_3H_1H_2$, $K_2K_4H_1H_2$, $K_3K_4H_1H_2$}. Misalnya **Y** adalah suatu fungsi dengan *domain* S dan *codomain* $\mathbb{R}$ dengan **Y**(ω) = banyaknya bola kuning yang terambil pada ω [untuk setiap $\omega \in S$]. Berikut ini adalah tabel yang menampilkan nilai-nilai **Y**(ω).

ω	**Y(ω)**	**ω**	**Y(ω)**	**ω**	**Y(ω)**
$K_1K_2K_3K_4$	4	$K_1K_2K_3H_2$	3	$K_1K_3H_1H_2$	2
$K_1K_2K_3H_1$	3	$K_1K_2K_4H_2$	3	$K_1K_4H_1H_2$	2
$K_1K_2K_4H_1$	3	$K_1K_3K_4H_2$	3	$K_2K_3H_1H_2$	2
$K_1K_3K_4H_1$	3	$K_2K_3K_4H_2$	3	$K_2K_4H_1H_2$	2
$K_2K_3K_4H_1$	3	$K_1K_2H_1H_2$	2	$K_3K_4H_1H_2$	2

Range dari **Y** adalah $\{2, 3, 4\} \subseteq \mathbb{R}$. Jadi, **Y** merupakan variabel acak.

Contoh 3: Bukan Variabel Acak

Misalkan dalam suatu kotak terdapat 6 buah bola yang hanya berbeda dalam hal warna: 2 bola berwarna merah, 2 hijau, 2 kuning. Anggaplah nama bola-bola merah adalah M_1 dan M_2, bola-bola hijau H_1 dan H_2, bola-bola kuning K_1, K_2. Kemudian diambil satu buah bola secara acak. Jadi, ruang sampelnya adalah S = {M_1, M_2, H_1, H_2, K_1, K_2}. Untuk setiap bola yang terambil, yang kita perhatikan adalah warnanya. Apabila untuk setiap $\omega \in S$ **W**(ω) = warna bola ω, **W**(M_1) = merah, **W**(M_2) = merah, **W**(H_1) = hijau, **W**(H_2) = hijau, **W**(K_1) = kuning,

W (K_2) = kuning sehingga *range* dari **W** adalah {merah, hijau, kuning} $\not\subseteq \mathbb{R}$. Jadi **W** bukan variabel acak.

Catatan:
Variabel acak biasa dilambangkan dengan huruf kapital bercetak tebal seperti halnya **X** dan **Y** pada Contoh 1 dan Contoh 2 di atas.

Variabel acak terbagi menjadi dua golongan, yaitu variabel acak diskrit dan variabel acak kontinu.

Variabel acak diskrit: variabel acak yang *range*-nya merupakan himpunan *countable*.

Distribusi peluang

Himpunan pasangan terurut $(x, f(x))$ merupakan suatu fungsi peluang atau distribusi peluang variabel acak diskrit **X** bilamana untuk setiap hasil yang mungkin x, berlaku: (i) $f(x) \geq 0$, (ii) $\sum_x f(x) = 1$, dan (iii) $P(\mathbf{X} = x) = f(x)$.

Catatan: $P(\mathbf{X} = x)$ berarti "peluang (terjadinya) **X** bernilai x"

Contoh 4: (Distribusi Peluang Variabel Acak pada Contoh 1)
Perhatikan kembali variabel acak pada Contoh 1. Berapakah peluang $\mathbf{X} = 0$? $\mathbf{X} = 0$ terjadi apabila $\omega \in$ {AAA} sehingga nilai peluang teoretis terjadinya $\mathbf{X} = 0$ adalah $P(\mathbf{X} = 0) = 1/8$. Berapa peluang $\mathbf{X} = 1$? $\mathbf{X} = 1$ terjadi apabila $\omega \in$ {AAG, AGA, GAA} sehingga $P(\mathbf{X} = 1) = 3/8$. Selanjutnya, $\mathbf{X} = 2$ terjadi apabila $\omega \in$ {AGG, GAG, GGA} sehingga $P(\mathbf{X} = 2) = 3/8$. Selanjutnya, dapat pula dipahami $P(\mathbf{X} = 3) = 1/8$. Jika kita definisikan $f(x) = P(\mathbf{X} = x)$ untuk setiap $x \in \{0, 1, 2, 3\}$ (= *range* dari **X**), maka $f(x)$ memenuhi semua kriteria pada definisi distribusi peluang di atas. (Periksalah!)

Contoh 5: (Distribusi Peluang Variabel Acak pada Contoh 2)
Pada Contoh 2, $\mathbf{Y} = 2$ terjadi apabila $\omega \in \{K_1K_2H_1H_2, K_1K_3H_1H_2, K_1K_4H_1H_2, K_2K_3H_1H_2, K_2K_4H_1H_2, K_3K_4H_1H_2\}$ sehingga $P(\mathbf{Y = 2}) = 6/15 = 0{,}4$. $\mathbf{Y} = 3$ terjadi apabila $\omega \in \{K_1K_2K_3H_1, K_1K_2K_4H_1, K_1K_3K_4H_1, K_2K_3K_4H_1, K_1K_2K_3H_2, K_1K_2K_4H_2, K_1K_3K_4H_2, K_2K_3K_4H_2\}$ sehingga $P(\mathbf{Y} = 3) = 8/15$. $\mathbf{Y} = 4$ terjadi apabila $\omega \in \{K_1K_2K_3K_4\}$ sehingga $P(\mathbf{Y} = 4) = 1/15$. Jika kita definisikan $f(y) = P(\mathbf{Y} = y)$ untuk setiap $y \in \{2, 3, 4\}$ (= *range* dari **Y**), maka $f(y)$ memenuhi semua kriteria pada definisi distribusi peluang di atas. (Periksalah!)

Tugas:

1. Berikan suatu contoh fungsi yang *codomain*-nya adalah $\mathbb{R}$, namun fungsi tersebut bukan variabel acak.
2. Perhatikan Contoh 1 di atas. Konstruksilah suatu fungsi f dengan daerah asal {0, 1, 2, 3} yang memenuhi kriteria (i) dan (ii) pada definisi distribusi peluang namun f tersebut bukan distribusi peluang dari variabel acak **X**.