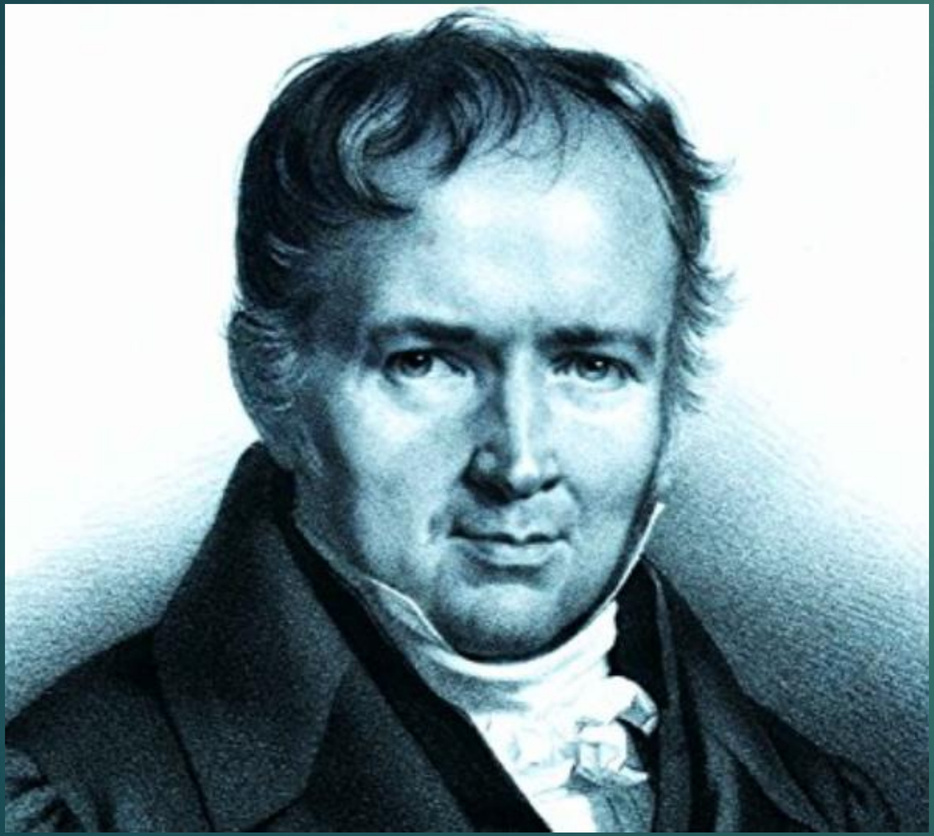
DISTRIBUSI POISSON

= SUATU PENGANTAR =

SEKILAS TENTANG DISTR. POISSON



- Diperkenalkan oleh Siméon Denis Poisson (1781-1840), dipublikasikan pada tahun 1838 dalam hasil karyanya yang berjudul Research on the Probability of Judgments in Criminal and Civil Matters.
- Digunakan sebagai hampiran bagi distribusi binomial apabila banyaknya percobaan $\to \infty$ dan peluang keberhasilan $\to 0$.
- Berkenaan dengan banyaknya peristiwa yang terjadi pada selang waktu tertentu atau area tertentu

CONTOH-CONTOH PENERAPAN

- Banyaknya mobil yang memasuki antrian di gerbang tol (pada selang waktu tertentu)
- Banyaknya cacat dalam produksi kain pada tiap m^2 kain yang diproduksi.
- Banyaknya pasien gawat darurat yang tiba di rumah sakit antara 01:00-03:00
- Banyaknya panggilan telepon yang diterima seorang sekretaris antara jam sibuk 10:00-12:00
- Banyaknya salah cetak yang terjadi dalam setiap 100 kata dalam berita di surat kabar.

PROSES POISSON

- [Syarat stasioneritas] Untuk setiap $n \geq 0$ dan untuk setiap dua interval waktu yang sama Δ_1 dan Δ_2, peluang terjadinya n buah peristiwa di Δ_1 sama dengan peluang terjadinya n buah peristiwa di Δ_2.
- [Syarat penambahan saling bebas] Untuk setiap $n \geq 0$ dan untuk setiap interval waktu (t,t+s), peluang terjadinya n buah peristiwa di (t,t+s) tidak ada hubungannya dengan berapa banyak peristiwa yang terjadi sebelumnya atau bagaimana terjadinya peristiwa-peristiwa itu. Lebih khususnya, misalkan diketahui k buah titik waktu $t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_k$. Untuk i = 1, 2, 3, ... , (k-1), misalkan A_i adalah kejadian n_i buah peristiwa proses itu terjadi dalam selang waktu $[t_i, t_{i+1})$. Penambahan saling bebas berarti bahwa $\{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{k-1}\}$ merupakan kumpulan kejadian yang saling bebas satu sama lain.
- [Syarat *orderliness*] Peluang munculnya dua atau lebih peristiwa dalam selang waktu yang sangat sedikit, mendekati nol. Secara lebih tepatnya, $\lim_{h \to 0} \frac{P[N(h) \geq 2]}{h} = 0$, dengan N(*h*) adalah banyaknya peristiwa yang terjadi dalam selang waktu *h*.

DISTRIBUSI PELUANG POISSON

- Jika x adalah banyaknya peristiwa yang terjadi dalam suatu proses Poisson maka peluang terjadinya x buah peristiwa dalam sembarang selang waktu t > 0 adalah $P(x;\lambda t) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!}$, dengan λ adalah banyaknya peristiwa per satuan waktu.
- Jika **X** adalah variabel acak yang menunjukkan banyaknya peristiwa yang terjadi dalam suatu proses Poisson, E[**X**] = λt dan Var[**X**] = λt.
- Note: $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2{,}718281828$

CONTOH 1

- Rata-rata banyaknya nasabah yang masuk ke dalam antrian bagian *teller* suatu bank setiap menitnya adalah 2. Tentukan peluang dalam 5 menit datang 7 orang nasabah ke dalam antrian bagian *teller* tersebut! Anggaplah banyaknya nasabah yang memasuki antrian berdistribusi Poisson.

- Jawab:
- λ = 2/menit, t = 5 menit. λt = 2.5 = 10
- $P(x;\lambda t) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!}$
- $P[X=7] = P(7;10) = \frac{10^7 \cdot e^{-10}}{7!} \approx 0{,}0901$

CONTOH 2

- Seorang sekretaris rata-rata menerima panggilan telepon sebanyak 3 buah dalam setiap 20 menit. Tentukan peluang dalam 1 jam berikutnya ia menerima 8 buah panggilan telepon. Anggaplah banyaknya telepon yang diterima berdistribusi Poisson.
- Jawab:
- λ = 3/(20 menit), t = 60 menit. $\lambda t = \frac{3}{20} \cdot 60 = 9$
- $P(x; \lambda t) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!}$
- $P[X = 8] = P(8; 9) = \frac{9^8 . e^{-9}}{8!} \approx 0,1318$

CONTOH 3

- Banyaknya kecelakaan yang terjadi di suatu perempatan jalan berdistribusi Poisson. Dari catatan yang ada, secara rata-rata terdapat 5 buah kecelakaan dalam tiap tujuh hari. Berapa peluang dalam tujuh hari berikutnya kurang dari 3 kecelakaan terjadi. Anggaplah banyaknya kecelakaan berdistribusi Poisson.
- Jawab:
- λ = 5/(7 hari), t = 7 hari. $\lambda t = \frac{5}{7} \cdot 7 = 5$
- $P[\boldsymbol{X} < 3] = P(0;5) + P(1;5) + P(2;5)$
- $P[\boldsymbol{X} < 3] = \frac{5^0 \cdot e^{-5}}{0!} + \frac{5^1 \cdot e^{-5}}{1!} + \frac{5^2 \cdot e^{-5}}{2!} \approx 0{,}0067 + 0{,}0337 + 0{,}0842 = 0{,}1246$

CONTOH 4

- Banyaknya kecelakaan yang terjadi di suatu perempatan jalan berdistribusi Poisson. Dari catatan yang ada, secara rata-rata terdapat 5 buah kecelakaan dalam tiap tujuh hari. Berapa peluang dalam tujuh hari berikutnya lebih dari 2 kecelakaan terjadi. Anggaplah banyaknya kecelakaan berdistribusi Poisson.
- Jawab:
- λ = 5/(7 hari), t = 7 hari. $\lambda t = \frac{5}{7} \cdot 7 = 5$
- P[**X**>2] = P(3;5) + P(4;5) + P(5;5) + ...
- P(0;5) + P(1;5) + P(2;5) + P(3;5) + P(4;5) + P(5;5) + ... = 1
- P(3;5) + P(4;5) + P(5;5) + ... = 1 – P(0;5) – P(1;5) – P(2;5)
- P(3;5) + P(4;5) + P(5;5) + ... = 1 – (P(0;5) + P(1;5) + P(2;5))
- P[**X**>2] = P(3;5) + P(4;5) + P(5;5) + ... ≈ 1 – 0,1246 = 0,8754

Definisi distribusi peluang

Himpunan pasangan berurut (x,f(x)) merupakan fungsi peluang, fungsi massa peluang, atau distribusi peluang dari variabel acak diskrit **X** jika untuk setiap hasil yang mungkin x berlaku tiga syarat berikut.

1. $f(x) \geq 0$
2. $\sum_x f(x) = 1$
3. $f(x) = P(\mathbf{X} = x)$

Catatan: P(**X** = x) = peluang variabel acak **X** bernilai x.

DISTRIBUSI POISSON SEBAGAI HAMPIRAN BAGI DISTR. BINOMIAL

- Misalkan **X** suatu variabel acak binomial dengan parameter n dan p. Jika n $\to \infty$, p $\to$ 0, dan np konstan maka

$$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \to \frac{(np)^x \cdot e^{-np}}{x!}$$

dengan x = 0, 1, 2, 3, ..., n

Catatan: hampiran tsb. cukup baik apabila n $\geq$ 100, p $\leq$ 0,01, dan np $\leq$ 20

CONTOH 5

- Produksi suatu barang secara massal menghasilkan 1% barang cacat. Dalam pengiriman 1000 unit barang tersebut, tentukan peluang didapatinya 6 barang cacat.
- Jawab:
- np = 1000.0,01 = 10, x = 6
- $P[\boldsymbol{X} = 6] = P(6; 10) = \frac{10^6 \cdot e^{-10}}{6!} \approx 0{,}0631$
- Seandainya digunakan distribusi binomial, diperoleh:
- $P[\boldsymbol{X} = 6] = \binom{1000}{6} \cdot 0{,}01^6 \cdot 0{,}99^{994} \approx 0{,}0627$